垂直ダクト中の自然対流(数理流体力学の展望)

八幡, 英雄

数理解析研究所講究録
922 巻 1995 年 192-194

垂直ダクト中の自然対流

広島大・理　八幡英雄 (Hideo YAHATA)

長方形領域 $\{(x,y):0<x<L,0<y<H\}$(ここで重力は y 軸の負の向きにとる) 内に閉じこめられた 2 次元流体を、一方の垂直境界壁で一様に加熱した場合、すなわち、温度場 $T(x,y)$ を境界条件

$$T(0,y)=T_1, T(L,y)=T_2 \qquad (0<y<H, T_1>T_2) \tag{1}$$

$$\partial_y T(x,0)=\partial_y T(x,H)=0 \qquad (0<x<L) \tag{2}$$

に保つとき発生する対流の場の時空間パターンを考察する。νを動粘性率、αを熱膨張率、gを重力加速度として、座標 x,y、時間 t、速度 $\mathbf{v}$、温度 Tを次のように無次元化する: $x\to Lx, y\to Hy, \mathbf{v}\to U\mathbf{v}, T\to T_2+(T_1-T_2)T$、ここで、$U=g\alpha(T_1-T_2)L^2/\nu$ は粘性項と浮力項のつりあい$\nu U/L^2\sim g\alpha(T_1-T_2)$ を特徴づける速度である。これらの変数をもちいると無次元化された運動方程式は Boussinesq 近似で、

$$\partial_t \mathbf{v}+G\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=-\nabla\Pi+\nabla^2\mathbf{v}+T\mathbf{e}_y \tag{3}$$

$$\partial_t T+G\mathbf{v}\cdot\nabla T=\frac{1}{Pr}\nabla^2 T \tag{4}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{5}$$

の形をとる。ここで、$\nabla=(\partial_x,(1/A)\partial_y), \mathbf{e}_y=(0,1)$ で、方程式は 3 個の無次元数: アスペクト比 $A=H/L$, Prandtl 数 $Pr=\nu/\kappa$, Grashof 数 $G=UL/\nu$によって特徴づけられている、ただしκは温度伝導率を表す。速度場にたいしては、各側壁で滑りなしの境界条件 $\mathbf{v}=\partial_n\mathbf{v}=0$ を課す。

この問題は、寒冷地の二重窓をはじめとして実用上も重要なため、多くの実験的・理論的研究がなされてきた[1-4)]。水平方向の温度差を特徴づける無次元パラメータである Grashof 数 G が小さい間は、流れは時計まわりの一様な回転で、温度は水平方向に

一様な勾配で定常分布しその等温線はy軸方向の平行直線をなす。Gを増加させていくと、垂直壁に沿って境界層が発達し垂直方向の流れは垂直壁近傍に強いshearをもつようになり、この部分では垂直方向の等温線が密に分布する。一方、中心部分の温度は垂直方向に勾配をもって分布するようになり、等温線は水平方向の平行直線群をなす。Mizushima & Gotoh, Bergholzはこのような状態を模型化し、$H=\infty$の場合に方程式系の線形安定性解析をおこなった[5,6]。その結果、中心部の温度の垂直勾配がある値以上に大きくなると、境界層の不安定性は定常形ではなく伝播波動形(T-S波)になることを示した。したがって、いま考えている長方形中の流体でもGをさらに増加させると、流れが振動伝播流に遷移することが予想され、実際に方程式の直接simulation[7–10]と線形安定性解析[11]によってこれが示された。以上は境界層の不安定化による振動流の発生であるが、この他に中心部の水平等温線群の示す密度の安定成層で起こる内部重力波による振動モードがある。垂直壁に沿った垂直流が水平壁に衝突して水平流になる際に、その部分でのFroude数の大小に応じて水平方向に向きを変えた流れ(成層流)の垂直成分の大小が決る。これがある値より大きいとhydraulic jumpとよばれる現象が起こり、内部重力波の振動を引起こすとされる[12,13]。Paolucci & Chenowethは$Pr=0.71$の場合に、実際にこのような2種類の振動モードが存在することを、方程式系のsimulationによって示し、$0.5<A<3$の場合にはGを増加させたとき、内部重力波の方がT-S波よりも前に出現すること、さらにGを増加させるとこれら2個のモードの非線形相互作用により流れがカオス化することを報告している[8]。

ここでは$A>3$の場合の流れのカオス化の機構を明らかにする目的で筆者が行なった計算結果の一例を示す[14]。速度の成分を$\mathbf{v}=(u,v)$として、方程式系(3)-(5)を、流れ関数$\psi(u=-(1/A)\partial_y\psi, v=\partial_x\psi)$、渦度$\omega=\partial_x v-(1/A)\partial_y u$を用いて表すと、

$$\partial_t\omega=\frac{G}{A}\frac{\partial(\omega,\psi)}{\partial(x,y)}+\nabla^2\omega+\partial_x T \tag{6}$$

$$\partial_t T=\frac{G}{A}\frac{\partial(T,\psi)}{\partial(x,y)}+\frac{1}{Pr}\nabla^2 T \tag{7}$$

$$\nabla^2\psi=\omega \tag{8}$$

となる。ここで、ヤコビアンはArakawa法、ラプラシアンはDuFort-Frankel法によって差分化した。得られた差分方程式をアスペクト比$A=6$, Prandtl数$Pr=1$の場合

に、G を増加させながら各 G の値に対して数値 simulation を行なった。ただし、(8) は SOR 法によって解いた。差分格子分割は x 方向に 40, y方向に 80 とした。$G = 4.9 \times 10^5$ で、定常流から振動流に遷移し、$G = 9 \times 10^5$では 2 個の振動数成分をもつ準周期的振動流が出現した。さらに G を徐々に (5×10^4程度) 増加させていくと、$G = 15 \times 10^5$では時系列のパワースペクトル密度で noise 成分が顕著になり流れはカオス状態になった。これに対し、$G = 12 \times 10^5$の準周期的状態から、$G = 16 \times 10^5$に急激に変化させると単純周期状態が再現し、この状態から G を徐々に増加させていくと、周期倍分岐を経て $G = 19 \times 10^5$では流れはカオス状態になる。以上の結果は G の増加の仕方により系は多重状態 multiple states(同じ G の値に対して複数個の時空間パターンが存在する) をとることを示している。これが物理的にどのような状態に対応しているのか今のところ不明である。また、差分格子幅の変化に対して同じ現象が再現されるか否か確認する必要がある。

参考文献

1) D.J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics, 2nd ed.* (Clarendon Press,1988), p.37.

2) J.W. Elder, J. Fluid Mech. **23**(1965), 77.

3) Y. Lee and S.A. Korpela, J. Fluid Mech. **126**(1983), 91.

4) J. Patterson and J. Imberger, J. Fluid Mech. **100**(1980), 65.

5) J. Mizushima and K. Gotoh, J. Fluid Mech. **73**(1976), 65.

6) R.F. Bergholz, J. Fluid Mech. **84**(1978), 743.

7) D.R. Chenoweth and S. Paolucci, J. Fluid Mech. **169**(1986), 173.

8) S. Paolucci and D.R. Chenoweth, J. Fluid Mech. **201**(1989), 379.

9) R. Henkes and C.J. Hoogendoorn, Appl. Sci. Res. **47**(1990), 195.

10) P. Le Quere and T. Alziary de Roquefort, J. Comp. Phys. **57**(1985), 210.

11) A.Yu. Gelfgat and I.Tanasawa, Num. Heat Transfer **A25**(1994),627.

12) J. Lighthill, *Waves in Fluids* (Cambridge University Press, 1978), p.175.

13) J.S. Turner, *Buoyancy Effects in Fluids* (Cambridge University Press, 1973), p.64.

14) これは土居良臣: 卒業論文 (広島大学・理、1995.3) の内容の継続研究である。